2.1.10 Lineární funkce III

Předpoklady: 2109

Minulá hodina

Lineární funkce je každá funkce, která jde zapsat ve tvaru $y = ax + b$, kde $a, b \in R$. Grafem lineární funkce je přímka (část přímky), kterou kreslíme většinou pomocí dvou bodů.

Pedagogická poznámka: Než začnou studenti kreslit grafy, je dobré si popovídat o strategii na volbu bodů, které použijí na kreslení grafů.
Nepřestává mě překvapovat, jak velký problém pro studenty kreslení následujících grafů představuje. Nezbývá než vydržet a snažit se jim radit, jak by mohli kreslení urychlit. Důležité je hlídat, aby si nepletli *x* a *y*, hodně chyb vzniká i tím, že studenti nejdřív spočítají všechny body u všech funkcí a pak teprve začnou kreslit. Myslím, že je třeba se snažit, aby tento postup nepoužívali. Jednak se jim může něco splést a jednak se tím ztrácí souvislost mezi spočítaným a nakresleným.
Samozřejmě nikde není dáno, že by studenti měli pro nakreslení grafů používat stejné body jako učebnice.
Snažím se je dotlačit k tomu, aby předpis funkce kreslili přímo do obrázku k odpovídající čáře místo jména funkce.

Pedagogická poznámka: Žáci netuší, jak mají oba příklady vyjít, a pokud nekreslí do čtverečkovaného papíru, grafy rozhodně nenakreslí rovnoběžně. Jednou možností je čtverečkovaný sešit (ale čtverečky jsou dost malé), druhou možností je vytisknout podklady pro grafy z přiloženého souboru. Žákům zdůrazňuji, že jde o výjimku a v dalších hodinách podobné papíry nedostanou. Měli by tedy během své práce přemýšlet o tom, jak kreslit, aby byla menší pravděpodobnost omylu i na čistém bílém papíře.

Pedagogická poznámka: U pomalejších studentů nečekáme až u prvních dvou příkladů nakreslí všechny čtyři grafy. Stačí, když udělají dva, obrázek všech grafů si mohou prohlédnout na stěně a vyvozovat z něj.

Jaký je význam konstant *a*, *b*?
Nejdřív *b*.

Př. 1: Nakresli do jednoho obrázku grafy funkcí: $f_1 : y = x$, $f_2 : y = x + 1$, $f_3 : y = x + 3$, $f_4 : y = x - 2$. Podle obrázku rozhodni, jak ovlivňují hodnoty parametru *b* graf lineární funkce. Analogicky rozhodni, jak ovlivňují graf hodnoty parametru *a*.

$f_1 : y = x$

Dosazujeme $x = 0 \Rightarrow y = x = 0 \Rightarrow$ bod $[0;0]$.

Dosazujeme $x = 2 \Rightarrow y = x = 2 \Rightarrow$ bod $[2;2]$.

$f_2 : y = x + 1$

Dosazujeme $x = 0 \Rightarrow y = x + 1 = 0 + 1 = 1 \Rightarrow$ bod $[0;1]$.

Dosazujeme $x = 2 \Rightarrow y = x + 1 = 2 + 1 = 3 \Rightarrow$ bod $[2;3]$.

$f_3 : y = x+3$

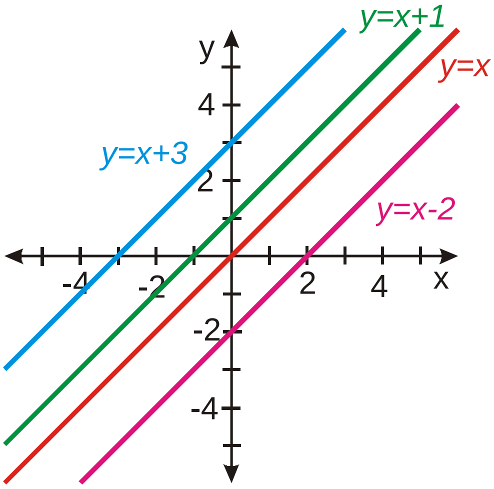
Dosazujeme $x = 0 \Rightarrow y = x+3 = 0+3 = 3 \Rightarrow$ bod $[0;3]$.

Dosazujeme $x = 2 \Rightarrow y = x+3 = 2+3 = 5 \Rightarrow$ bod $[2;5]$.

$f_4 : y = x-2$

Dosazujeme $x = 0 \Rightarrow y = x-2 = 0-2 = -2 \Rightarrow$ bod $[0;-2]$.

Dosazujeme $x = 2 \Rightarrow y = x-2 = 2-2 = 0 \Rightarrow$ bod $[2;0]$.



$\Rightarrow$ Všechny grafy mají stejný směr, ale jsou různě posunuté ve svislém směru. $\Rightarrow$ konstanta *b* neovlivňuje směr přímky, ale její posunutí ve svislém směru (určuje také průsečík s osou *y*, který má souřadnice $[0;b]$).

Poznámka: Metoda, kterou jsme použili je vlastně fyzikální metodou na objevování funkčních závislostí. Jednu proměnou jsme měnili a vše ostatní nechávali stejné, abychom zjistili, jak měnící se proměnná ovlivňuje výsledek.

Teď *a*.

Př. 2: Nakresli do jednoho obrázku grafy funkcí: $f_1 : y = x+1$, $f_2 : y = 3x+1$, $f_3 : y = 0,5x+1$, $f_4 : y = -2x+1$. Podle obrázku rozhodni, jak ovlivňují hodnoty parametru *a* graf lineární funkce.

$f_1 : y = x+1$

Dosazujeme $x = 0 \Rightarrow y = x+1 = 0+1 = 1 \Rightarrow$ bod $[0;1]$.

Dosazujeme $x = 2 \Rightarrow y = x+1 = 2+1 = 3 \Rightarrow$ bod $[2;3]$.

$f_2 : y = 3x+1$

Dosazujeme $x = 0 \Rightarrow y = 3x+1 = 3\cdot 0+1 = 1 \Rightarrow$ bod $[0;1]$.

Dosazujeme $x = 1 \Rightarrow y = 3x+1 = 3\cdot 1+1 = 4 \Rightarrow$ bod $[1;4]$.

$f_3 : y = 0,5x+1$

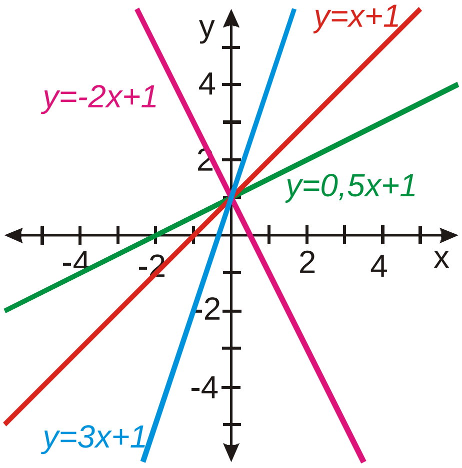
Dosazujeme $x = 0 \Rightarrow y = 0,5x+1 = 0,5\cdot 0+1 = 1 \Rightarrow$ bod $[0;1]$.

Dosazujeme $x = 2 \Rightarrow y = 0,5x+1 = 0,5\cdot 2+1 = 2 \Rightarrow$ bod $[2;2]$.

$f_4 : y = -2x+1$

Dosazujeme $x=0 \Rightarrow y=-2x+1=-2\cdot 0+1=1 \Rightarrow$ bod $[0;1]$.

Dosazujeme $x=2 \Rightarrow y=-2x+1=-2\cdot 2+1=-3 \Rightarrow$ bod $[2;-3]$.



Všechny grafy se s osou y protínají v bodě $[0,1]$, ale mají různý směr. $\Rightarrow$ konstanta *a* neovlivňuje posunutí přímky, ale její směr.

$f_2: y=3x+1 \Rightarrow$ velké *a*, strmý graf.

$f_4: y=0,5x+1 \Rightarrow$ malé *a*, pozvolný graf.

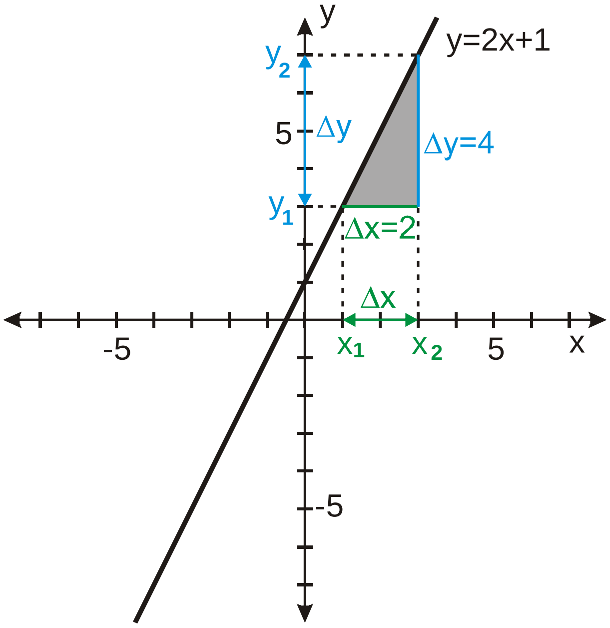
Jak popisuje číslo *a* sklon?

Velký sklon = změní-li se *x* o málo, pak se *y* zvětší o hodně.

Zkusíme na funkci $y=2x+1$.

O kolik se zvětší *x*: $\Delta x = x_2 - x_1 = 3-1=2$.

O kolik se zvětší *y*: $\Delta y = y_2 - y_1 = 7-3=4$.

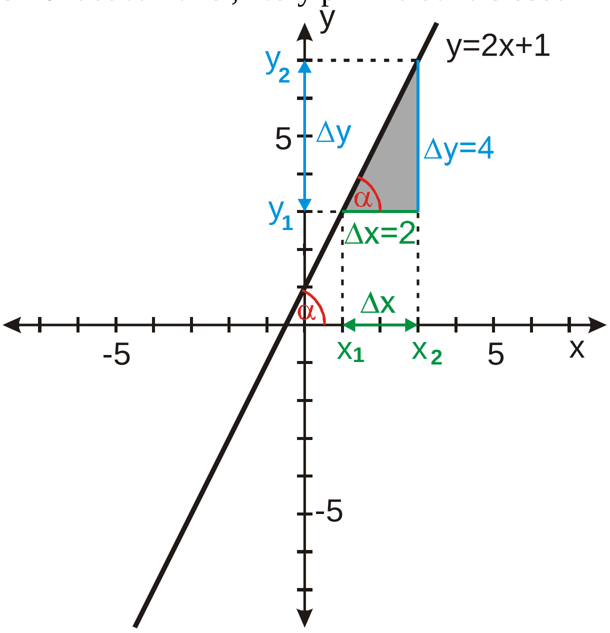


Kopec je strmý, když na dráze 3 m vylezeme o 2 m výš. Když vylezeme na dráze 1 km o 10 m výš, strmé to moc není. $\Rightarrow$ Strmost není velikost Δy, ale poměr $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ $\Rightarrow$ spočteme ho:

$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{4}{2} = 2$ - to je hodnota *a*! $\Rightarrow$ tedy $a = \frac{\Delta y}{\Delta x}$.

Jiný zápis $a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$.

Směr udává i úhel, který přímka svírá s osou *x* $\Rightarrow$ i úhel by měl jít vyjádřit pomocí *a*.



Úhel můžeme v pravoúhlém trojúhelníku vyjádřit pomocí goniometrických funkcí, nejlépe tangens $\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{protilehlá}{přilehlá} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = a \Rightarrow a = \mathrm{tg}\,\alpha$.

Pedagogická poznámka: Nechávám studenty, aby si sami zvolili jiná čísla x_1 a x_2 a ověřili si platnost předchozích výsledků.

Stejný typ grafu už známe z fyziky:

- rovnoměrný pohyb $s = vt + s_0 \Leftrightarrow y = ax + b$.

Význam konstant je stejný:

- *a* udává, jak rychle se mění *y* $\Leftrightarrow$ *v* (rychlost) udává, jak rychle se mění dráha,
- *b* udává, průsečík s osou *y* $\Leftrightarrow$ s_0 udává, jak vysoko na ose *s* začíná graf dráhy.

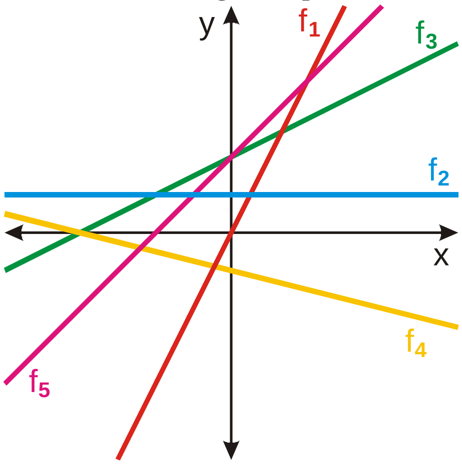
Konstanta *a* určuje u grafu lineární funkce směr, konstanta *b* posunutí ve svislém směru.

Př. 3: Na obrázku bez popsaných os jsou načrtnuty grafy funkcí.

a) $y = -0,25x - 1$ b) $y = 1$ c) $y = x + 2$

d) $y = 2x$ e) $y = 0,5x + 2$

Přiřaď každému grafu správnou funkci.



Správné přiřazení:

$f_1 : y = 2x$ - jediná přímá úměrnost, nejstrmější ze všech funkcí,

$f_2 : y = 1$ - jediná konstantní funkce, protíná se s osou *y* níže než většina ostatních funkcí,

$f_3 : y = 0,5x + 2$ - protíná se s osou *y* výše než konstantní funkce, má menší sklon,

$f_4 : y = -0,25x - 1$ - protíná se s osou *y* v záporných číslech, jediná jde dolů,

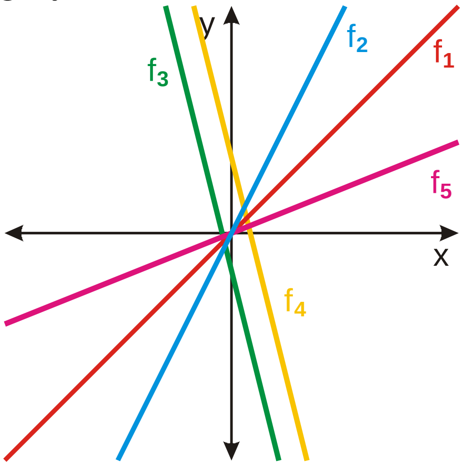
$f_5 : y = x + 2$ - protíná se s osou *y* výše než konstantní funkce, má větší sklon.

Př. 4: Na obrázku bez popsaných os jsou načrtnuty grafy funkcí.

a) $y = 0,2x$ b) $y = -2x + 2$ c) $y = x$

d) $y = 0,5x$ e) $y = -2x - 1$

Přiřaď každému grafu správnou funkci. Upozornění: obrázek je zdeformován, sklony přímek neodpovídají sklonům přímek při normálním zobrazení. Je nutné posuzovat grafy relativně vůči sobě.



Správné přiřazení:

$f_1 : y = 0,5x$ - přímá úměrnost, středně velká strmost,

$f_2 : y = x$ - přímá úměrnost, nejstrmější graf,

$f_3 : y = -2x - 1$ - funkce směřuje dolů, protíná se s osou *y* v záporném číslu,

$f_4 : y = -2x + 2$ - funkce směřuje dolů, protíná se s osou *y* v kladném číslu,

$f_5 : y = 0,2x$ - přímá úměrnost, nejméně strmý graf.

Př. 5: Načrtni (bez počítání a vynášení bodů) do jednoho obrázku bez popsaných os (analogicky jako v předchozím příkladě) grafy těchto funkcí.

a) $f_1 : y = 3x - 1$ b) $f_2 : y = 3x + 2$ c) $f_3 : y = -2x$

d) $f_4 : y = -x + 2$ e) $f_5 : y = -1$

a) $f_1 : y = 3x - 1$

$a = 3 \Rightarrow$ strmý graf směřující doprava nahoru, $b = -1 \Rightarrow$ s osou y se protíná pod počátkem.

b) $f_2 : y = 3x + 2$

$a = 3$ $b = 2 \Rightarrow$ graf rovnoběžný s grafem z bodu a), s osou y se protíná nad počátkem.

c) $f_3 : y = -2x$

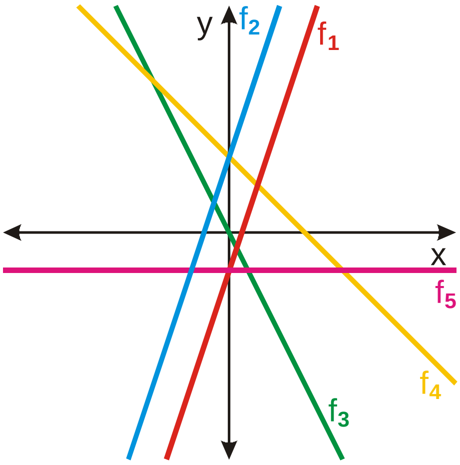
$a = -2 \Rightarrow$ strmý (ale méně než v bodech a) b)) graf směřující doprava dolů, $b = 0 \Rightarrow$ prochází počátkem.

d) $f_4 : y = -x + 2$

$a = -1 \Rightarrow$ graf směřující doprava dolů (méně strmý než v bodě c)), $b = 2 \Rightarrow$ s osou y se protíná nad počátkem ve stejném bodě jako graf z bodu b).

e) $f_5 : y = -1$

$a = 0 \Rightarrow$ konstantní funkce, vodorovná přímka, $b = -1 \Rightarrow$ s osou y se protíná pod počátkem ve stejném bodě jako graf a).



Shrnutí: Grafy lineárních funkcí můžeme kreslit také podle hodnot jejich parametrů - a určuje strmost, b určuje průsečík s osou y.